

Propuesta de clase metodológica instructiva sobre aproximación mínimo cuadrática en una base trigonométrica

Proposal for an instructive methodological class on minimum quadratic approximation in a trigonometric base

Damián Valdés Santiago¹, Valentina Badía Albanés²

¹ Facultad de Matemática y Computación. Universidad de La Habana, Cuba. dvs89cs@matcom.uh.cu

² Facultad de Matemática y Computación. Universidad de La Habana, Cuba. valia@matcom.uh.cu



PARA CITAR ESTE ARTÍCULO

Valdés Santiago, D. (2023) Propuesta de clase metodológica instructiva sobre aproximación mínimo cuadrática en una base trigonométrica. Alternativas, 24(2).

DOI

<https://doi.org/10.23878/alternativas.v24i2.429>

CORRESPONDENCIA

dvs89cs@matcom.uh.cu



UNIVERSIDAD CATÓLICA
DE SANTIAGO DE GUAYAQUIL

Av. Carlos Julio Arosemena, Km 1,5. Guayaquil, Ecuador
Teléfono: +593 4 380 4600
Correo electrónico: revista.alternativas@cu.ucsg.edu.ec
Web: www.ucsg.edu.ec



© The Autor(s), 2023

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited. To view a copy of this license visit <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>.

Propuesta de clase metodológica instructiva sobre aproximación mínimo cuadrática en una base trigonométrica

Proposal for an instructive methodological class on minimum quadratic approximation in a trigonometric base

Damián Valdés Santiago¹, Valentina Badía Albanés²

¹ Facultad de Matemática y Computación. Universidad de La Habana, Cuba. dvs89cs@matcom.uh.cu

² Facultad de Matemática y Computación. Universidad de La Habana, Cuba. valia@matcom.uh.cu

RESUMEN

El trabajo metodológico se define como un conjunto de actividades destinadas a mejorar la preparación pedagógica y metodológica de los docentes, con el fin de facilitar transformaciones efectivas en el proceso educativo. En particular, el plan de estudios E de la carrera Ciencia de la Computación demanda un perfeccionamiento continuo, especialmente en la asignatura Matemática Numérica. Para responder a esta necesidad, se ha desarrollado una clase metodológica instructiva que se centra en la aproximación por mínimos cuadrados mediante funciones bases ortogonales trigonométricas. Esta iniciativa se fundamenta en una investigación llevada a cabo en la Facultad de Matemática y Computación de la Universidad de La Habana. La propuesta incluye un resumen de contenidos relevantes, ejercicios prácticos y enfoques comparativos que enriquecen el aprendizaje. Además, está diseñada para servir como guía para otros docentes, contribuyendo a su desarrollo profesional y promoviendo así la mejora continua en la enseñanza de las matemáticas. A través de este enfoque, se busca no solo fortalecer las habilidades docentes, sino también optimizar el proceso educativo en su conjunto.

PALABRAS CLAVE

Ciencia de la computación; Clase metodológica instructiva; Matemática numérica; Proceso docente-educativo; Trabajo metodológico.

ABSTRACT

Methodological work is defined as a set of activities aimed at improving the pedagogical and methodological preparation of teachers, in order to facilitate effective transformations in the educational process. In particular, the Computer Science E curriculum demands continuous improvement, especially in the subject of Numerical Mathematics. To address this need, an instructional methodology class has been developed that focuses on least squares approximation using trigonometric orthogonal basis functions. This initiative is based on research carried out at the Faculty of Mathematics and Computer Science of the University of Havana. The proposal includes a summary of relevant contents, practical exercises and comparative approaches that enrich learning. In addition, it is designed to serve as a guide for other teachers, thus contributing to their professional development and promoting continuous improvement in the teaching of mathematics. Through this approach, it seeks not only to strengthen teaching skills, but also to optimize the educational process as a whole.

KEYWORDS

Computer science; Instructional methodological class; Numerical mathematics; Methodological work; Teaching-educational process.

Introducción

La Ciencia de la Computación se dedica al análisis de los principios teóricos que rigen los procesos informativos y computacionales, así como a su aplicación en la creación de sistemas computacionales. Este campo avanza en paralelo con el rápido desarrollo de la ciencia y la tecnología, proporcionando soluciones a las necesidades de informatización que plantea la sociedad actual (Figueroa Mora, Hoyos Rivera, Martínez Villaseñor, & Morales Gamboa, 2023).

De acuerdo al plan de estudios E (Universidad de La Habana, 2017), el objeto fundamental del trabajo del Licenciado en Ciencia de la Computación es la creación de sistemas computacionales, sustentada en enfoques matemático-computacionales, para la solución de problemas propios o interdisciplinarios.

La disciplina Matemática Aplicada en la carrera Ciencia de la Computación contribuye a la comprensión de la importancia que tiene en el desarrollo del país la aplicación de los métodos matemáticos y la computación. Abarca tres grandes áreas: Matemática Numérica, Probabilidades y Estadística y Optimización. Esta disciplina permitirá al estudiante resolver problemas de la disciplina Matemática Básica que no pueden ser resueltos analíticamente. Creará las bases para poder asimilar e incorporar modelos, técnicas y herramientas más complejos en otras disciplinas de la carrera.

En particular, el objeto de estudio de la asignatura Matemática Numérica son los métodos numéricos fundamentales y la aplicación de los mismos para aproximar, de modo eficiente y en forma algorítmica, las soluciones de problemas expresados matemáticamente. Es creciente la necesidad de métodos y algoritmos para resolver, con el uso de las computadoras modernas, los diversos modelos matemáticos que surgen de la ciencia y la tecnología.

La asignatura está diseñada para preparar al futuro egresado en el análisis, aplicación, modificación y adaptación de métodos numéricos generales a situaciones específicas. Se busca que los estudiantes utilicen estos métodos de manera eficiente en entornos computacionales y que sean capaces de desarrollar nuevos algoritmos para resolver problemas prácticos formulados a través de modelos matemáticos.

Dentro del contenido del curso, se abordan la estimación y propagación de errores, la estabilidad numérica, métodos iterativos para ecuaciones y sistemas de ecuaciones no lineales, sistemas de ecuaciones lineales, métodos

directos, factorizaciones, métodos iterativos para sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, condiciones de convergencia, interpolación polinomial y por tramos, aproximación mínimo cuadrática de datos, transformada de Fourier y diferenciación e integración numéricas.

Se realiza el presente trabajo con el objetivo de presentar y discutir el diseño de una clase metodológica instructiva sobre la aproximación mínimo cuadrática con funciones base ortogonales trigonométricas, para que sirva de guía a profesores de menor experiencia, en su proceso de desarrollo como docentes universitarios.

Desarrollo

Generalidades acerca del trabajo metodológico: la clase metodológica instructiva

El trabajo metodológico es un conjunto de actividades continuas realizadas por los docentes en todos los niveles educativos. Su objetivo es mejorar la preparación pedagógico-metodológica y científica de los educadores, asegurando así una ejecución eficiente del proceso educativo. Junto con otras formas de superación profesional y postgraduada, este enfoque busca alcanzar la idoneidad del personal docente y generar influencias positivas en la formación integral de los estudiantes (García González, Varela de Moya, & Espíndola Artola, 2019; Resolución 47: Reglamento Trabajo Docente y Metodológico. Ministerio de Educación Superior, Cuba, 2022).

La planificación cuidadosa del proceso educativo es esencial para alcanzar el resultado deseado. Esto implica establecer claramente los objetivos y los contenidos; organizar de manera precisa las diversas formas y métodos a utilizar; regular la acción operativa del proceso y controlar hasta qué punto el estudiante avanza hacia el objetivo establecido (García González, Varela de Moya, & Espíndola Artola, 2019).

El proceso educativo requiere un enfoque metodológico cuidadoso que asegure una planificación, organización, regulación y control efectivos. Este proceso debe estar fundamentado en principios didácticos que promuevan un desarrollo óptimo de la enseñanza, donde el profesor asuma un papel central en garantizar la calidad de la materia impartida. Para ello, es esencial que el docente cuente con una sólida preparación pedagógica y un dominio profundo de los contenidos de la asignatura. Además, debe ser capaz de orientar, controlar y evaluar a los estudiantes, lo que facilitará un mejor entendimiento de los contenidos y contribuirá a su formación integral en relación con los ob-

jetivos generales del curso (Chaviano Herrera, Baldomir Mesa, Coca Meneses, & Gutiérrez Maydata, 2016; García González, Varela de Moya, & Espíndola Artola, 2019).

En el proceso de enseñanza-aprendizaje el papel orientador lo tiene el profesor como representante de la sociedad en dicho proceso y es él quien plantea los objetivos a los estudiantes (Addine, Recarey, Fuxá, & Fernández, 2020). A medida que los estudiantes desarrollan una mayor conciencia, se apropian de sus objetivos de aprendizaje de manera más natural, integrando la contradicción en su proceso educativo y mostrando así su independencia. Esta contradicción se vuelve social, ya que se establece una diferencia entre los objetivos establecidos en el programa y el nivel de logro individual de cada estudiante, quien se autodirige en su aprendizaje. En este contexto, el rol del docente evoluciona de ser un líder directo a convertirse en un orientador y consejero.

En el proceso docente se manifiestan los métodos y formas de (Addine, Recarey, Fuxá, & Fernández, 2020). Por el primero entendemos el modo de realizar las acciones el profesor y los estudiantes para alcanzar los objetivos, y por forma de enseñanza, la estructura organizativa que se adopta, en un momento dado en el proceso docente, con el fin de lograr los objetivos.

El artículo 275.1 (Resolución 47: Reglamento Trabajo Docente y Metodológico. Ministerio de Educación Superior, Cuba, 2022) establece que la conferencia es el tipo de clase que tiene como objetivo principal la transmisión a los estudiantes de los fundamentos científico-técnicos más actualizados de una rama del saber con un enfoque dialéctico-materialista, mediante el uso adecuado de métodos científicos y pedagógicos, de modo que les ayude en la integración de los conocimientos adquiridos y en el desarrollo de las habilidades y valores necesarios para el ejercicio de la profesión.

Según el plan de estudios E de la carrera Ciencia de la Computación (Universidad de La Habana, 2017), en las clases prácticas se ilustrarán fundamentalmente las particularidades numéricas y computacionales de los algoritmos estudiados, mediante la discusión de ejercicios propuestos y de resultados de corridas en la computadora, utilizando sistemas de programas existentes o elaborados previamente para este fin, por los propios estudiantes. Se destacan también los materiales o medios de enseñanza con ayuda de los cuales realizan sus actividades

el profesor y los estudiantes para alcanzar los objetivos.

La tarea fundamental de la Didáctica es la de estructurar los distintos componentes que caracterizan el proceso: el contenido, las formas y métodos de enseñanza, los medios de enseñanza, de modo tal de alcanzar el encargo social, apoyándose para ellos en las leyes y regularidades inherentes a dicho proceso.

Entre los tipos fundamentales de trabajo docente-metodológico se encuentran las clases metodológicas. La clase metodológica es el tipo de trabajo docente-metodológico que, mediante la demostración, la argumentación y el análisis, orienta a los profesores sobre algunos aspectos de carácter metodológico que contribuyen a su preparación para la ejecución del proceso docente educativo. Las clases metodológicas se realizarán, fundamentalmente, en los colectivos de asignatura y de disciplina.

Ahora bien, las clases metodológicas poseen dos modalidades: La clase metodológica demostrativa (CMD) y la clase metodológica instructiva (CMI). Es precisamente esta última la que afronta mayores dificultades por su propia complejidad. De manera similar, muchos de los aspirantes a transitar a una categoría docente superior presentan dificultades en el ejercicio correspondiente, al manifestar insuficiencia en su elaboración y defensa ante el tribunal (Pozas Prieto, López Fernández, & Santacana Palencia, 2018).

La diferencia fundamental de la CMI con la CMD radica en que en la primera se impartirán las actividades docentes a partir de los problemas metodológicos identificados y no una clase del programa como la que se imparte a los estudiantes, que es lo que ocurre en la demostrativa. El objetivo esencial de la CMI es instruir a los docentes en determinados aspectos que constituyen el centro de las dificultades detectadas (Alonso Berenguer et al., 2020; Guerrero Seide, 2018).

En la CMI el tratamiento metodológico que se explica no debe estar desvinculado de la base conceptual de la asignatura o aspecto científico que se aborde, por lo que se identifica el problema didáctico objeto de análisis con el término general de “problema conceptual metodológico”, el cual contiene una contradicción didáctica entre el contenido de la asignatura y la manera óptima de impartirlo dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, o sea, entre el contenido y su orientación metodológica, entre el “qué” enseñar y “cómo” hacerlo para

potenciar el aprendizaje de los alumnos (Alonso Berenguer et al., 2020; Méndez Pupo & García Vázquez, 2018).

Las CMI no existen aisladas sino que se entrelazan con el resto de las formas del trabajo metodológico concebidas con un enfoque de sistema desde su planificación hasta su ejecución, de acuerdo con las deficiencias detectadas a través de la labor de asesoramiento y control que se desarrolla en los diferentes niveles organizativos existentes, a partir de las cuales se determinan las prioridades del trabajo metodológico en cada curso escolar y las CMI juegan entonces un importante papel dirigido a proponer determinadas soluciones didácticas a dichas insuficiencias (Pozas Prieto, López Fernández, & Santacana Palencia, 2018).

Metodología

Se realizó una investigación en el campo de la educación matemático-computacional, en la Facultad de Matemática y Computación de la Universidad de La Habana, que permitió diseñar y estructurar una clase metodológica instructiva correspondiente al tema Aproximación de funciones.

La clase formó parte del plan de trabajo metodológico de la disciplina Matemática Numérica correspondiente al curso 2024 y fue realizada en el colectivo de la disciplina como un ejercicio para el cambio de categoría docente del primer autor de este artículo.

En este trabajo se presenta dicha clase sobre la aproximación mínimo cuadrática con funciones base ortogonales trigonométricas. Se definió el objetivo metodológico instructivo y la línea de trabajo metodológico. Se propuso el sumario de la actividad docente a desarrollar, y el desarrollo de la clase con sus tres partes: introducción, desarrollo y conclusiones.

Clase metodológica instructiva: aproximación mínimo cuadrática con funciones base ortogonales trigonométricas.

Objetivo Metodológico: Instruir a los docentes en cómo utilizar alternativas metodológicas para desarrollar la actividad docente sobre la aproximación mínimo cuadrática con funciones base ortogonales trigonométricas, para promover un aprendizaje significativo.

Línea de trabajo metodológico: Perfeccionamiento de la dirección del aprendizaje para estimular un aprendizaje desarrollador y significativo en la aproximación mínimo cuadrática

con funciones base ortogonales trigonométricas.

Carrera: Ciencia de la Computación

Disciplina: Matemática Aplicada.

Asignatura: Matemática Numérica. Segundo Año.

Tema IV: Aproximación mínimo cuadrática.

Actividad Docente: Aproximación mínimo cuadrática con funciones base ortogonales trigonométricas.

Sumario: Introducción. Funciones base ortogonales en el espacio $L^2 [0; 2\pi]$. Polinomio trigonométrico de Fourier. Cálculo aproximado de los coeficientes de Fourier.

Forma de organización de la enseñanza: Conferencia.

Duración: 2 horas/clase.

Objetivos instructivos:

- Introducir la aproximación mínimo cuadrática de funciones periódicas con funciones base trigonométricas
- Introducir fundamentos matemáticos del análisis de Fourier y su relación con las aplicaciones.

Bibliografía básica: Burden, R. L., Faires, J. D., & Burden, A. M. (2010). Numerical analysis. Cengage Learning, pp. 545-567.

Bibliografía complementaria: Heath, M. T. (2018). Scientific Computing: An Introductory Survey (Revised Ed). Society for Industrial and Applied Mathematics, pp. 494-503.

Métodos: expositivo, elaboración conjunta y participativo.

Medios: pizarra y plumones, diapositivas, computadoras.

Evaluación: observación del trabajo de los estudiantes, preguntas orales y discusiones grupales.

Observaciones: El profesor debe ser ejemplo con su puntualidad y porte y aspecto. El local debe estar limpio, con buena iluminación y ventilación, sin objetos que puedan distraer al estudiante.

Desarrollo de la conferencia:

Introducción

Se controla la asistencia y puntualidad de los estudiantes. A continuación, se realiza un comentario que será la motivación de la clase, expresando que la aproximación mínimo cuadrática es un método fundamental en el análisis numérico y la estadística, utilizado para ajustar modelos a datos observados mini-

mizando el error cuadrático. Su relevancia se amplifica cuando se emplean funciones base ortogonales, como las funciones trigonométricas, en el proceso de ajuste.

Además, el método mínimo cuadrático con funciones base ortogonales trigonométricas se aplica ampliamente en diversas áreas: en telecomunicaciones y audio, donde las señales pueden ser descompuestas en componentes sinusoidales para su análisis y síntesis; en economía y meteorología, donde los patrones estacionales pueden ser modelados utilizando series temporales basadas en funciones trigonométricas; y en regresión múltiple y ajuste de curvas donde se busca entender relaciones complejas entre variables.

Al ser un tema nuevo se realiza un recordatorio de la conferencia anterior donde se abordó el tema de la aproximación mínimo cuadrática con funciones base ortogonales. Se realizan preguntas de control para tener retroalimentación de la conferencia previa, donde se propicia el debate con los estudiantes, evaluando a los que voluntariamente decidan responder, según la calidad de sus respuestas dándole una nota (2, 3, 4 o 5).

Además, se recuerda qué son funciones ortogonales con respecto a un conjunto de puntos, qué objetivo tiene el uso de funciones ortogonales para la determinación de los coeficientes de la aproximación mínimo cuadrática, qué importancia tiene calcular los coeficientes de la aproximación mínimo cuadrática sin usar las ecuaciones normales, así como las formas estudiadas de combatir el mal condicionamiento de las ecuaciones normales.

Luego de esta exposición se presenta el resumen de la conferencia y se orientan sus objetivos, así como la bibliografía básica y complementaria para la profundización de los contenidos.

Desarrollo

Posteriormente, se ejecuta la conferencia, aplicando los métodos mencionados y apoyándose en los medios necesarios. Se controla el progreso de los estudiantes y se realizan las aclaraciones que se consideren necesarias en cada momento. Se expone que el análisis de Fourier es una de las ramas más antiguas del Análisis Matemático y debe su nombre al científico y matemático francés Jean Baptiste Fourier (1768-1830), quien demostró que cualquier función $f(x)$ con forma de onda periódica puede ser expresada como la suma de un conjunto infinito de ondas sinus-

oidales, cuyas frecuencias deben ser múltiplos enteros de una frecuencia fundamental.

En el contexto del análisis de Fourier existen dos áreas de especial interés, que son la transformada integral de Fourier y la serie de Fourier de una función $f(x)$ con determinadas características. Entre las motivaciones para usar el desarrollo en serie de Fourier se mencionan:

- analíticas: exponencial compleja y su relación con las funciones seno y coseno; la asociación de los términos sucesivos de la serie de Fourier con armónicos de frecuencia (relaciona ondas y vibraciones con resonancia).
- numéricas y de aplicaciones: la conveniencia de usar funciones ortogonales en la aproximación mínimo cuadrática.

A continuación se presenta el modelo matemático de una señal electromagnética periódica en su representación mediante una función sinusoidal $s(t) = \text{sen}(2\pi ft + \phi)$, cuya representación gráfica se observa en la Figura 1 para diferentes valores de la amplitud (A), la frecuencia radial (f en radianes por segundos) y la fase (ϕ). Para entender la transmisión de datos en una señal es importante expresarla como función de la frecuencia.

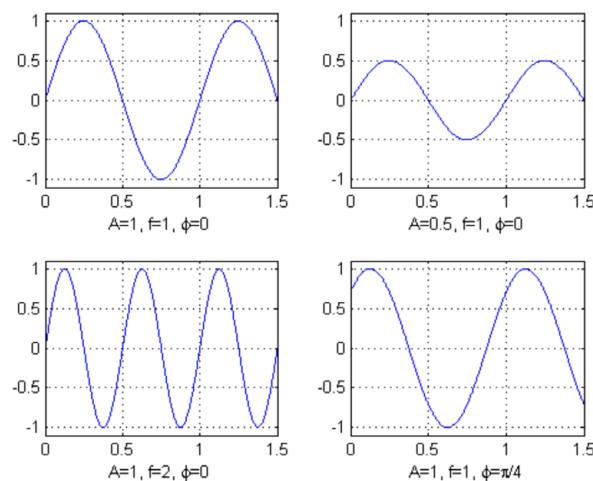


Figura 1. Representación gráfica del modelo de una señal para diferentes valores de la amplitud (A), la frecuencia radial (f en radianes por segundos) y la fase (ϕ)

Se comenta que a pesar de que una señal puede contener frecuencias dentro de un rango amplio, se tiene que cualquier medio de transmisión enviará los datos en una banda limitada de frecuencia, con lo cual se restringe la cantidad de datos que se transmiten por unidad de tiempo. Si

se conoce la expresión analítica que los origina, entonces, de los argumentos de las funciones seno y coseno se puede extraer la información acerca de las frecuencias presentes en las respectivas señales. Sin embargo, si se cuenta con un conjunto de valores discretos de la señal, resulta difícil extraer esta información.

Se plantea entonces la siguiente interrogante: ¿qué está pasando matemáticamente y cómo se relaciona con la aproximación mínimo cuadrática? La respuesta es que una señal puede ser descrita por una función, que a su vez puede ser vista como un vector de un espacio vectorial. Entonces, se pueden introducir bases ortonormales en el espacio vectorial de las funciones periódicas y, bajo ciertas condiciones, se puede expandir una función en término de dichas bases. Los coeficientes de dicha expansión nos darán información acerca de las frecuencias presentes en la señal. Dichos coeficientes pueden ser calculados computacionalmente de forma eficiente en determinados casos.

Si consideramos el sistema ortonormal $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{1, e^{\pm i k x}\}_{k \in \mathbb{N}}$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$, estamos ante la serie trigonométrica de Fourier s , que aproxima a la extensión 2π -periódica de $f(x) \in L^2[-\pi, \pi]$ (espacio de las funciones de cuadrado integrable):

$$s := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i k x}, \quad c_k(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i k x} dx.$$

En este punto se recuerda que para funciones complejas el producto escalar en el caso continuo se define como:

$$\langle g, h \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \overline{h(x)} dx,$$

y en el caso discreto como:

$$\langle g, h \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} g(x_l) \overline{h(x_l)}.$$

Se orienta como ejercicio al estudiante demostrar que tomando como base del espacio Φ el conjunto de funciones $\{\varphi_j(x)\}_{j=-n}^n = \{1, e^{\pm i x}, e^{\pm i 2x}, \dots, e^{\pm i n x}\}$ se tiene una base ortonormal con respecto a ambos productos escalares.

Se acota también que para aproximar una función $f(x)$ por la serie de Fourier es necesario que esta serie sea convergente a la función. Cuando esto no se cumple entonces se consideran los polinomios trigonométricos, que se definen a continuación.

Un polinomio trigonométrico de orden n es cualquier función de la forma:

$$p(x) = \sum_{j=-n}^n c_j e^{i j x},$$

donde c_j son constantes reales o complejas.

Al retomar lo visto en la conferencia anterior sobre la teoría general para la aproximación por mínimos cuadrados, la expresión de los coeficientes de Fourier $\hat{f}(j) = c_j$ del polinomio trigonométrico de orden n :

$$p(x) = \sum_{j=-n}^n c_j e^{i j x},$$

de la función $f(x)$ se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones normales $Bc=h$, que tendrá la forma:

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \langle \varphi_{-1}, \varphi_{-1} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0^* \\ c_1^* \\ \vdots \\ c_n^* \\ \vdots \\ c_{-1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, 1 \rangle \\ \langle f, e^{ix} \rangle \\ \vdots \\ \langle f, e^{inx} \rangle \\ \vdots \\ \langle f, e^{-ix} \rangle \end{bmatrix}.$$

Se observa que, dado que el sistema $\{\varphi_j(x)\}_{j=-n}^n = \{1, e^{\pm i x}, e^{\pm i 2x}, \dots, e^{\pm i n x}\}$ es ortonormal, la matriz B , además de ser diagonal, es la identidad, por lo que los coeficientes c_j^* se obtienen directamente como:

$$c_j^* = \hat{f}(j) = \langle f, \varphi_j \rangle = \langle f, e^{i j x} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-i j x} dx,$$

$$c_j^* = \hat{f}_N(j) = \langle f, \varphi_j \rangle = \langle f, e^{i j x} \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f(x_l) e^{-i j x_l},$$

para el caso continuo y discreto, respectivamente, donde N es el número de subdivisiones del intervalo $[0, 2\pi]$ y $x_l = \frac{2\pi}{N} l$ son los puntos muestrales. La notación $\hat{f}(j)$ y $\hat{f}_N(j)$ para los coeficientes de Fourier obedece a que las expresiones anteriores pueden ser interpretadas como la transformada continua de Fourier y la transformada discreta de Fourier, respectivamente.

Se señala además que, si se considera la fórmula de Euler, el polinomio trigonométrico se puede reescribir como:

$$p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cos jx + b_j \sin jx,$$

donde $a_j = (c_j + c_{-j})$ y $b_j = i(c_j - c_{-j})$. Este desarrollo se deja como ejercicio al estudiante.

Esta reescritura permite plantear el siguiente teorema:

Sea $f \in V = L^2([-\pi, \pi])$, $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^n = \{1, \cos kx, \sin kx\}$ un sistema ortonormal de dimensión finita que genera a V_n y

$$p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

con a_k y b_k coeficientes de Fourier de f . Entonces, $p(x)$ es el elemento en V_n que está más cercano a f en la norma L^2 , esto es:

$$\|f - p(x)\|_{L^2} = \min_{g \in V_n} \|f - g\|_{L^2}.$$

Es decir, la suma parcial $\sum_{j=-n}^n \hat{f}(j)e^{ijx}$ de la serie de Fourier para $f(x)$ es la mejor aproximación a esta función mediante polinomios trigonométricos de orden n , con respecto a la norma:

$$\|g\|_{L^2} = \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g^2(x)| dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Se destaca que según el teorema de Dirichlet esta serie converge a $f(x)$, en los puntos de continuidad de la función y a la semisuma de los límites laterales en los puntos de discontinuidad, siendo $f(x)$ una función 2π -periódica, donde esta función y su primera derivada son seccionalmente continuas en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

De ahí, la importancia del siguiente teorema:

Supongamos que:

$$p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

donde:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| < \infty,$$

entonces, la serie trigonométrica de Fourier converge uniforme y absolutamente a la función $f(x)$.

Las demostraciones de ambos teoremas se proponen para la clase práctica correspondiente a esta conferencia.

Para ilustrar lo expresado hasta el momento, se brinda el siguiente ejemplo: Obtener la serie de Fourier para la prolongación periódica de:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ -1 & \text{si } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}.$$

Como la prolongación periódica de esta función es discontinua en $k\pi, k \in \mathbb{Z}$, no se puede esperar

que sea bien aproximada por bases de funciones que son continuas. Además, si se tiene en cuenta el teorema de Dirichlet entonces la serie de Fourier convergerá a la semisuma de los límites laterales en los puntos de discontinuidad.

Se procede entonces al cálculo exacto de los coeficientes de Fourier:

$$\begin{aligned} c_j^* &= \hat{f}(j) = \langle f, e^{ijx} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ijx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} 1 \cdot e^{-ijx} dx - \int_{\pi}^{2\pi} -1 \cdot e^{-ijx} dx \right] \\ &= \frac{i}{\pi j} (\cos \pi j - 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \text{ es par} \\ -\frac{2i}{\pi j} & \text{si } j \text{ es impar} \end{cases} \end{aligned}$$

Como f es real,

$$c_{-j} = \overline{c_j} = \left(-\frac{2i}{\pi j} \right) = \frac{2}{\pi j} i, \text{ para } j \text{ impar},$$

$$j = 0, c_0 = \hat{f}(0) = 0.$$

Por tanto, los coeficientes son:

$$\begin{aligned} c_0 &= \hat{f}(0) = 0, c_j = \hat{f}(j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \text{ es par} \\ \frac{2}{\pi j} i & \text{si } j \text{ es impar} \end{cases} \\ c_{-j} &= \hat{f}(-j) = \frac{2}{\pi j} i, \text{ si } j \text{ impar}. \end{aligned}$$

Si expresamos la serie en términos de senos y cosenos se tiene:

$$a_j = c_j + c_{-j} = 0,$$

$$b_j = i(c_j - c_{-j}) = \frac{4}{\pi j},$$

entonces, como solo aparecen los términos de índice impar:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j-1} \sin(2j-1)x.$$

En la Figura 2 se observa que a medida que se toman más términos en las sumas parciales N -ésimas pues nos vamos acercando a la forma de la onda cuadrada, sin embargo, en las esquinas (puntos de discontinuidad), hay problemas, lo cual es lógico porque como se dijo más arriba se aproxima una función con discontinuidades mediante una suma finita de funciones continuas (efecto de Gibbs). Otro aspecto importante a destacar es el hecho de que para lograr una aproximación cada vez mejor se necesita considerar frecuencias arbitrariamente grandes.

En este punto se realizan los siguientes comentarios: Existen dos características distintivas en la representación de una función f mediante una serie de Fourier: la función f se descompone en una suma infinita de componentes mutuamente ortogonales; la base ortonormal es generada por la dilatación de la función $w(x) := e^{ix}$, $w_n(x) = w(nx) = e^{inx}$ para todo entero n .

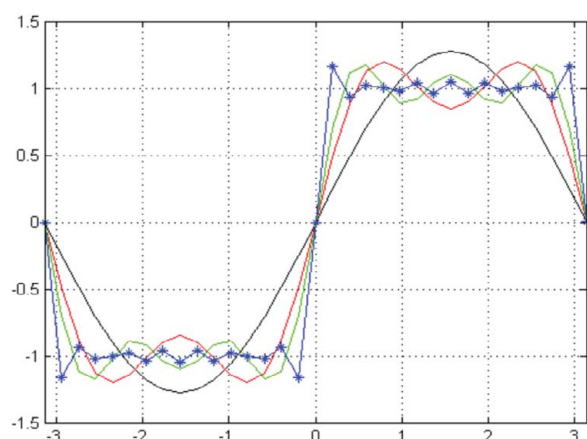


Figura 2. Sumas parciales de orden $n=1$ (en negro), $n=3$ (en rojo), $n=5$ (en verde) y $n=7$ (en negro) de la serie de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ -1 & \text{si } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

Si interpretamos a la función como una señal, entonces los coeficientes de Fourier forman un conjunto denominado espectro de la señal, el espectro nos informa cuánto de cada frecuencia hay en la señal (en el caso del sonido, nos dirá cuanto de cada frecuencia hay en el sonido). Los coeficientes de Fourier para valores pequeños de j nos dan la información de las bajas frecuencias y los coeficientes para valores grandes de j nos dan información de las altas frecuencias.

Además, el número $|f(j)|$ mide en cuanto un movimiento armónico simple de frecuencia angular j está presente en el movimiento total. La sucesión completa $|f(0)|, |f(1)|, \dots$ (o quizás la sucesión de sus cuadrados) es llamada el espectro de potencias o simplemente el espectro de $f(x)$. Note que mediante la relación de Parseval el espectro de $f(x)$ está acotado mediante $\|f\|_2^2$, pero esta función puede variar ampliamente en su comportamiento en dependencia de cómo la energía total $\|f\|_2^2$ está distribuida sobre el espectro $|f(0)|, |f(1)|, \dots$. Una función ruidosa tendrá un valor significativo de $|f(j)|$ para valores mayores de j , mientras que para una función suave el espectro disminuirá rápidamente en la medida que j aumente.

Conclusiones

De esta forma culminan los contenidos de la conferencia y se realiza una sistematización de lo aprendido. Luego, se realizan preguntas a los estudiantes sobre los aspectos clave a aprender en esta clase que les permitan cumplir los objetivos de la misma:

1. ¿Qué objetivo se persigue al representar una función mediante su serie de Fourier?
2. ¿Qué tipo de funciones admiten representación mediante serie de Fourier?
3. Menciona las dos formas de expresar un polinomio trigonométrico de orden n .
4. ¿Qué cálculo requiere la obtención de los coeficientes de Fourier del polinomio de aproximación trigonométrica?
5. ¿Qué dificultad presenta ese cálculo en el caso continuo?

Finalmente, como estudio independiente se orienta resolver los siguientes ejercicios:

1. Grafique la función $y = \sin(5x) + \sin(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Determine a mano cuáles son las frecuencias presentes en la señal y luego mediante el comando `fft` de Matlab para distintos tamaños de la muestra, observe cómo para valores pequeños de la muestra se pueden perder frecuencias.
NOTA: tenga en cuenta que:

- a. Las muestras se obtienen al evaluar la función en $t = (0:N-1) \cdot (T/N)$, donde T es el período y N el tamaño de la muestra.
- b. Para evitar el efecto *aliasing* a la hora de obtener los coeficientes (la transformada discreta) se necesita muestrear $f(t)$ de manera que la frecuencia de muestreo $f_s = \frac{1}{\Delta t}$ para producir $f(n)$ sea al menos mayor que dos veces la frecuencia máxima presente en $f(t)$. Pruebe, por ejemplo, con $N=5$, $N=11$ y con $N=50$.

- ◆ Obtenga el polinomio de aproximación trigonométrica usando el comando `interpft` de Matlab. Tome los mismos valores de N que en el inciso anterior

3. Encuentre la serie de Fourier (puede experimentar primero con los polinomios trigonométricos) para la siguiente función

$f(x)=|x|$ para $-\pi < x < \pi$ periódica con período $T=2\pi$.

Recomendaciones para la conferencia

Se recomienda enseñar el tema desde un enfoque de álgebra lineal discreta y procesamiento de señales, como se desarrolló en el texto de Frazier (1999) y, más recientemente, el de Ryan (2019). Esto implica un cambio didáctico importante en el tema IV de la asignatura. Además, modificar la bibliografía básica y complementaria del programa de la asignatura para agregar textos en idioma español como Burden et al. (2017, pp. 319–342) y Chapra y Canale (2007, pp. 310–317), así como las notas de clase de León Mecías (2016).

CONCLUSIONES

La clase metodológica instructiva propuesta tiene como objetivo capacitar a los docentes en la realización de conferencias sobre la solución numérica de sistemas de ecuaciones lineales usando métodos iterativos, promoviendo así un aprendizaje significativo para los futuros graduados en Ciencia de la Computación.

El enfoque metodológico considera la naturaleza del contenido y las relaciones entre los temas, la asignatura y la disciplina correspondiente, favoreciendo un aprendizaje que impulse el desarrollo personal y profesional del estudiante. Durante la conferencia, se resumieron los contenidos tratados y se llevaron a cabo dinámicas grupales para evaluar el aprendizaje. Además, se resolvieron ejercicios típicos del tema y se compararon diferentes enfoques para abordar los sistemas de ecuaciones lineales.

La metodología presentada puede servir como modelo para otros docentes en la enseñanza de Matemática Numérica en universidades cubanas y del extranjero.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Addine, F., Recarey, S., Fuxá, M., & Fernández, S. (2020). *Didáctica: teoría y práctica*. Editorial Pueblo y Educación.
- Alonso Berenguer, I., Gorina Sánchez, A., & Iglesias Domecq, N. (2020). ¿Cómo estructurar y desarrollar una clase metodológica instructiva? *Revista Roca*, 16.
- Burden, R. L., Faires, D. J., & Burden, A. M. (2017). *Análisis numérico*. Cengage Learning Editores. <https://biblioteca.uazuay.edu.ec/buscar/item/80835>
- Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2007). *Métodos numéricos para ingenieros*. McGraw-Hill-Interamericana.
- Chaviano Herrera, O., Baldomir Mesa, T., Coca Meneses, O., & Gutiérrez Maydata, A. (2016). La evaluación del aprendizaje: nuevas tendencias y retos para el profesor. *Edumecentro*, 8(4), 191–205.
- Figueroa Mora, K. M., Hoyos Rivera, G. de J., Martínez Villaseñor, M. de L., & Morales Gamboa, R. (2023). La importancia del pensamiento computacional en la era digital. In Carreño (eds.). *Pensamiento Computacional en Iberoamérica* (Vol. 3, pp. 34–55). Academia Mexicana de Computación. <https://amexcomp.mx/media/publicaciones/pensamiento-computacional-version-final-portada-reduced.pdf#page=34>
- Frazier, M. W. (1999). An Introduction to Wavelets Through Linear Algebra. In *An Introduction to Wavelets Through Linear Algebra*. Springer-Verlag. <https://doi.org/10.1007/b97841>
- García González, M. C., Varela de Moya, H. S., & Espíndola Artola, A. (2019). Las formas del trabajo docente metodológico en el contexto actual de la educación superior. In *Humanidades Médicas* (Vol. 19, pp. 607–636). scielocu.
- Guerrero Seide, E. (2018). Análisis lógico semántico del contenido de las clases metodológicas instructivas. *Didasc@ Lia: Didáctica y Educación*, 9(3), 129–144.
- León Mecías, Á. (2016). *Notas de clase de Matemática Numérica II*.
- Méndez Pupo, A. R., & García Vázquez, O. (2018). El problema conceptual metodológico y el docente metodológico. Aproximación a sus rasgos distintivos. *Roca: Revista Científico-Educaciones de La Provincia de Granma*, 14(3), 133–142.
- Pozas Prieto, W. J., López Fernández, J., & Santacana Palencia, T. A. (2018). Análisis histórico de los procesos de categorías docentes en la Universidad de Ciencias Pedagógicas José Martí. *Revista Cubana de Educación Superior*, 37(1), 148–161.
- Resolución 47: Reglamento Trabajo Docente y Metodológico. Ministerio de Educación Superior, Cuba (2022).
- Ryan, Ø. (2019). Linear algebra, signal processing, and wavelets. A unified approach. Python version. Springer Nature. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-02940-1>
- Universidad de La Habana. (2017). Plan de Estudio “E”, Carrera Ciencia de la Computación.